Prednáška 11

11.1. Fubiniho veta a veta o substitúcii

Teraz uvedieme dve dôležité tvrdenia, ktoré nám budú pomáhať pri výpočtoch integrálov. Prvé z nich nám hovorí, kedy môžeme zamieňať viacnásobné integrály (poradie integrovania).

Veta 11.1.1 (Fubini)**.**

Nech pre $r, s \in \mathbb{N}$ je $M \in \mathcal{M}_{r+s}$ a $f \in \mathcal{L}^*_{r+s}(M)$. Pre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ označme $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{r+s}$. Buď ďalej $P_1 = \{\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r, \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}$, $P_2 = \{\mathbf{y};\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}$ (priemety M do priestoru x-ov, resp. y-ov). Ak P_1 je λ_r−merateľná a P_2 je λ_s−merateľná, potom

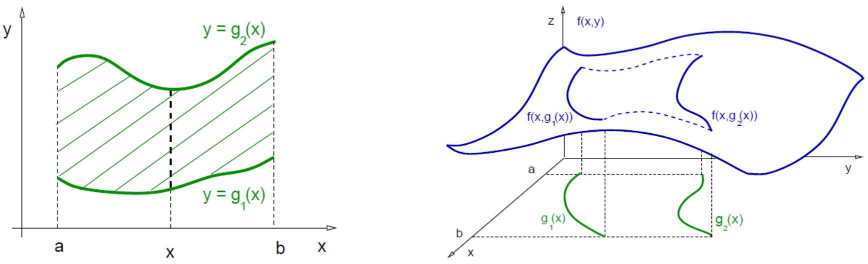
(I) Pre s.v. $\mathbf{x} \in P_1$ existuje $\int_{M^{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\lambda_s(\mathbf{y}) =: G(\mathbf{x})$,
Pre s.v. $\mathbf{y} \in P_2$ existuje $\int_{M^{\mathbf{y}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\lambda_r(\mathbf{x}) =: H(\mathbf{y})$, kde

$$\text{pre } \mathbf{x} \in P_1 \text{ je } M^{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y};\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s,\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}, \quad \text{pre } \mathbf{y} \in P_2 \text{ je } M^{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r,\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}.$$

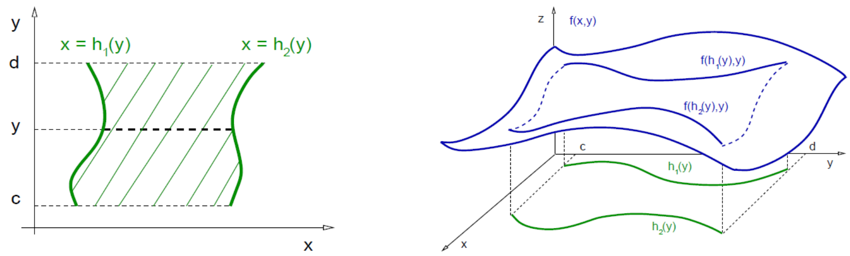
(II) Existujú $\int_{P_1} G(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\lambda_r(\mathbf{x})$ a $\int_{P_2} H(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\lambda_s(\mathbf{y})$.

(III) Platí

$$\int_M f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\lambda_{r+s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{P_1} G(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\lambda_r(\mathbf{x}) = \int_{P_2} H(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\lambda_s(\mathbf{y}).$$



(a) $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$



(b) $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)$

Obr. 11.1: Oblasti pri integrovaní v $\mathbb{R}^2$.

Poznámka 11.1.2.

Uvažujme funkciu $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ na otvorenom štvorci $(0,1)^2$. Potom $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) \right) \mathrm{d}\lambda_1(x) = \frac{1}{2}$ a $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \right) \mathrm{d}\lambda_1(y) = -\frac{1}{2}$.

Túto vetu je možné použiť niekoľkokrát, až postupne prevedieme $(r+s)$-násobný integrál na sled $(r+s)$ jednorozmerných integrálov. Rozhodujúci predpoklad je existencia $(r+s)$-násobného integrálu ($f \in \mathcal{L}^*_{r+s}(M)$), potom existujú aj zvyšné dva a rovnajú sa. Vtip je v tom, že sa môže stať, že sa "rozumne" dá vypočítať iba jeden z nich. Tento predpoklad je množné nahradiť merateľnosťou f a požiadavkami v nasledujúcom dôsledku.

Dôsledok 11.1.3.

Nech je označenie rovnaké ako vo vete 11.1.1 a f spĺňa:

(1) f je λ_{r+s}–merateľná na $M \in \mathcal{M}_{r+s}$.

(2) Niektorý z integrálov

$$\int_{P_1} \left(\int_{M^{\mathbf{x}}} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \,\mathrm{d}\lambda_s(\mathbf{y}) \right) \mathrm{d}\lambda_r(\mathbf{x}),$$

$$\int_{P_2} \left(\int_{M^{\mathbf{y}}} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \,\mathrm{d}\lambda_r(\mathbf{x}) \right) \mathrm{d}\lambda_s(\mathbf{y})$$

je konečný.

Potom $f \in \mathcal{L}_{r+s}(M)$ a platí

$$\int_M f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,\mathrm{d}\lambda_{r+s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{P_1} G(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\lambda_r(\mathbf{x}) = \int_{P_2} H(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\lambda_s(\mathbf{y}).$$

Poznámka 11.1.4.

Napríklad v $\mathbb{R}^2$ to znamená, že pre oblasti na obrázku 11.1 platí

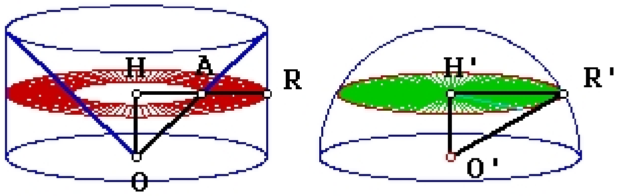
$$\int_M f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda_1(y) \right) \mathrm{d}\lambda_1(x),$$

$$\int_M f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \int_c^d \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \right) \mathrm{d}\lambda_1(y).$$

Poznámka 11.1.5.

V priestore $\mathbb{R}^3$ máme dve možnosti.

Pri počítaní príkladov si väčšinou stačí uvedomiť, že každá otvorená, či uzavretá množina v $\mathbb{R}^m$ je merateľná a merateľné sú aj ich spočítateľné zjednotenia a prieniky a aj ich doplnky. Teda bežné telesá v $\mathbb{R}^3$ sú merateľné množiny.



(a) Rozdiel objemov medzi valcom a kužeľom je rovnaký ako objem pologule.

(b) Dve kôpky mincí s rovnakým objemom.

Obr. 11.2: Cavalieriho princíp.

Príklad 11.1.6.

Vypočítajme $\int_M x \, d\lambda_3(x, y, z)$, kde M je štvorsten S, ohraničený súradnicovými rovinami a rovinou $x + 2y + z = 1$. Je zrejmé, že platí Fubiniho veta. Priemetom S do roviny $z = 0$ je trojuholník T, ohraničený osami x, y a priamkou $x + 2y = 1$. Máme teda

$$\int_M x \, d\lambda_3(x, y, z) = \int_D \left(x \int_0^{1-x-2y} d\lambda_1(z) \right) d\lambda_2(x, y) = \int_D x(1 - x - 2y) \, d\lambda_2(x, y) =$$

$$\int_0^1 x \left(\int_0^{(1-x)/2} 1 - x - 2y \, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = \int_0^1 \frac{x(x-1)^2}{4} \, d\lambda_1(x) = \frac{1}{48}.$$

Dôsledok 11.1.7 (Cavalieriho princíp)**.**

Buďte V, V' dve telesá. Ak existuje taká rovina, že rezy s V a V' každou rovinou s ňou rovnobežnou majú rovnaký obsah, potom V a V' majú rovnaký objem.

Poznámka 11.1.8.

Dá sa ukázať, že ak sú $M \in \mathcal{M}_r,\ P \in \mathcal{M}_s$, potom je $M \times P \in \mathcal{M}_{r+s}$ a $\lambda_{r+s}(M \times P) = \lambda_r(M)\lambda_s(P)$. Taktiež,

$$\lambda_r(M) = \int_{P_i} \lambda_{r-1}(M^{x_i})\lambda_1(x_i),$$

kde P_i je priemet množiny M do osy x_i a M^{x_i} je rez množiny M rovinou x_i =konšt., stručne: miera množiny je rovná integrálu z mier ich $(r-1)$-rozmerných rezov.

Na rozdiel od Fubiniho vety je postavenie integrálov v nasledujúcej vete "rovnoprávne" (ak existuje jeden z nich existujú obe a sú rovnaké).

Veta 11.1.9.

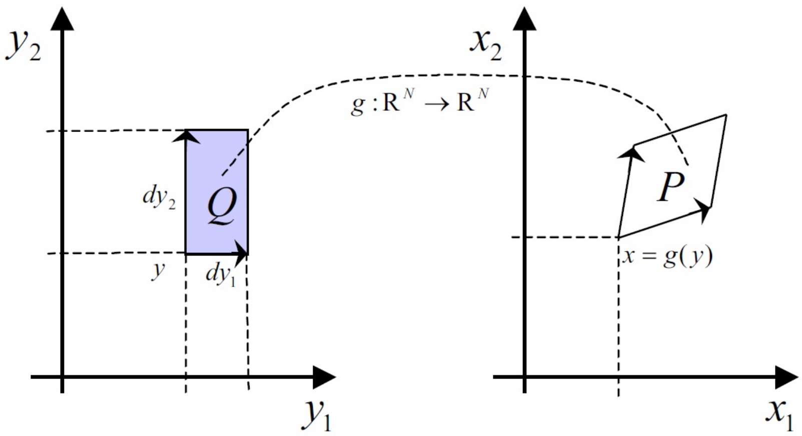
Nech ϕ je prosté regulárne zobrazenie otvorenej množiny $G \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ a $M \in \mathcal{M}_n,\quad M \subset \phi(G)$. Potom, ak f je definovaná s.v. na M, tak

$$\int_M f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_{\phi^{-1}(M)} f(\phi(\mathbf{x}))\,|J_\phi(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\lambda_n(\mathbf{x}),$$

pokiaľ aspoň jeden z integrálov existuje.

Poznámka 11.1.10.

Geometrický význam afinnej transformácie $g(y) = \mathbf{A}y + b$. Pomer plochy zobrazeného kosodĺžnika $P = g(Q)$ a zobrazovaného obdĺžnika je daný práve determinantom matice $\mathbf{A}$, tj. $|P|/|Q| = |\mathbf{A}|$. Z toho môžeme dedukovať vzťah medzi elementárnou plochou $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = |\mathbf{A}|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$. Idea dôkazu vety o substitúcii pre všeobecný prípad difemorfizmu $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ potom plynie z aproximácie zobrazenia g v bode $\tilde{y}$ pomocou Taylorovho rozvoja $g(y) = \mathbf{A}y + b + o(\|y - \tilde{y}\|)$, kde $\mathbf{A} = g'(\tilde{y})$.



Obr. 11.3: Geometrický význam afinnej transformácie.

Príklad 11.1.11.

Spočítajme integrál $I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\lambda_2(x,y)$. Integrál existuje, keďže integrand je spojitý a nezáporný. Použijeme polárne súradnice. Je to regulárne prosté zobrazenie z $G = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ do $\mathbb{R}^2 \setminus P$, kde P je nezáporná x-ová poloos. Tu využijeme fakt, že $\lambda_2(P) = 0$. Teda

$$I = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus P} e^{-x^2-y^2}\, d\lambda_2(x,y) = \int_G e^{-r^2} r\, d\lambda_2(r,\phi).$$

Teraz využijeme Fubiniho vetu a dostaneme

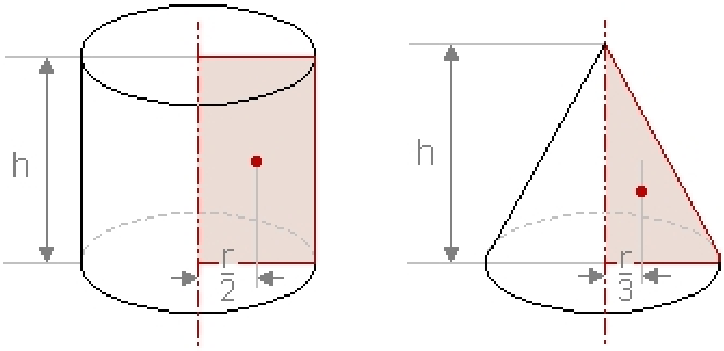
$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, d\lambda_1(\phi) \right) d\lambda_1(r) = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r\, d\lambda_1(r) = 2\pi \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-r^2} r\, d\lambda_1(r).$$

Rozmyslite si poslednú rovnosť. A konečne dostaneme

$$I = \pi \lim_{n\to\infty} [-e^{-r^2}]_0^n = \pi.$$

Dôsledok 11.1.12 (Pappus-Guldin)**.**

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinného útvaru P okolo osi, ktorá leží v rovine útvaru P a nepretína P je rovný súčinu plošného obsahu útvaru P a dĺžky kružnice, ktorú pri rotácii opíše hmotný stred útvaru P.



Obr. 11.4: Pappusov-Guldinov dôsledok.

11.2. Geometrické a fyzikálne aplikácie množných integrálov

V tejto časti predpokladáme, že dané integrály existujú v Lebesgueovom zmysle a teda aj predpoklady, ktoré tomu prislúchajú.

Buď Ω podmnožina $\mathbb{R}^2$, potom

(i) $S = \int_\Omega \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$ je jej plošný obsah,

(ii) Ak $f(x,y) \geq g(x,y)$ na Ω, potom objem telesa so zovšeobecneným valcovým plášťom (ohraničený funkciami g, f) je

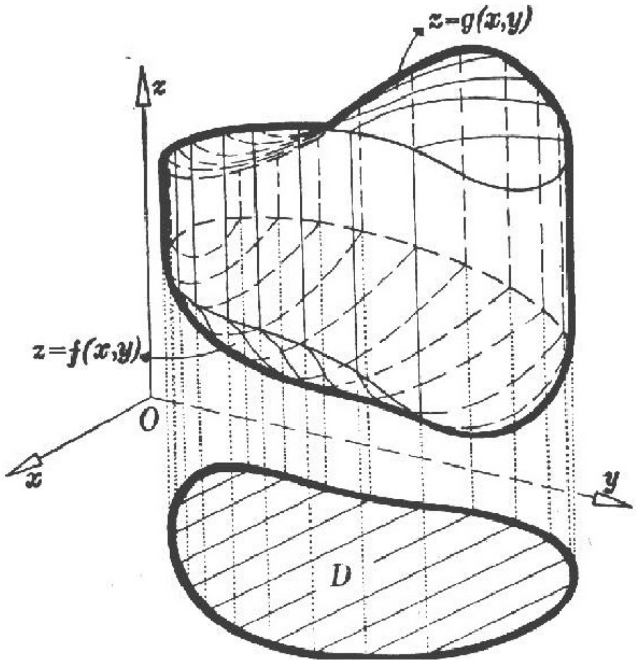
$$V = \int_\Omega f(x,y) - g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$$

(iii) Nech $z \in C^1(M)$, potom povrch plochy (graf funkcie z) je

$$S = \int_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y),$$

kde $\Omega \subseteq M$ je priemet danej plochy do roviny xy

(iv) Ak je plocha daná parametricky rovnicami $\mathbf{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ \ (u,v) \in \Omega,\ \Omega$ je ohraničená a



Obr. 11.5: Objem telesa v $\mathbb{R}^3$.

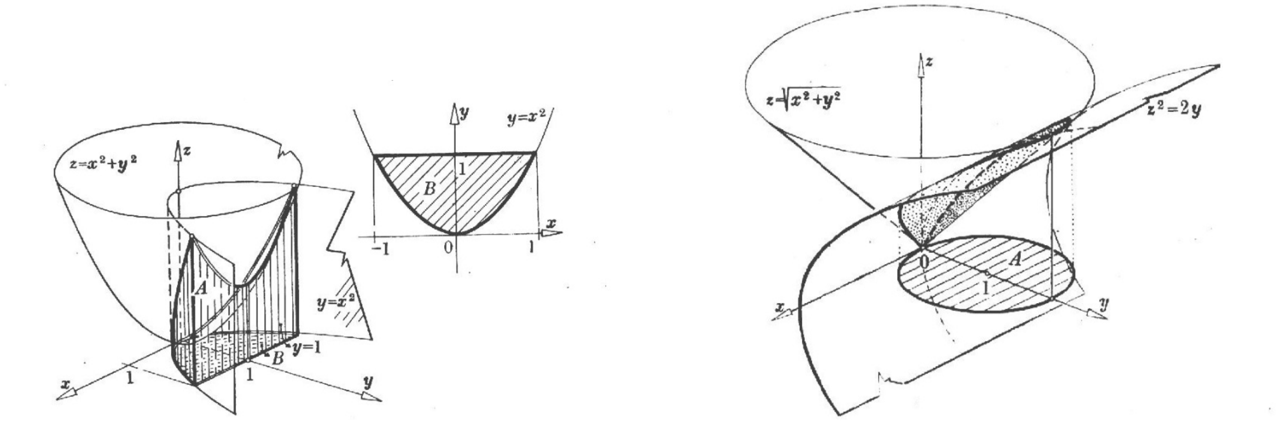
$x, y, z \in C^1(\Omega)$, potom obsah plochy je

$$S = \int_\Omega \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \mathrm{d}\lambda_2(u,v) = \int_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}\lambda_2(u,v),$$

kde $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$, $F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

(v) Ak je plocha Ω určená implicitne ako $F(x,y,z) = 0$, $(x,y) \in$ a $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ pre každý bod z Ω, potom obsah je

$$S = \int_\Omega \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$



(a) Teleso A a množina B v príklade 11.2.1.

(b) Množina A v príklade 11.2.2

Obr. 11.6: .

Príklad 11.2.1.

Nájdime objem telesa A, ktoré vznikne ohraničením plochami $z = x^2 + y^2$, $y = x^2, y = 1, z = 0$. Dané teleso je zdola ohraničené rovinou xy, zhora rotačným paraboloidom $z = x^2 + y^2$ a z bokov parabolickým valcom $y = x^2$ a rovinou $y = 1$. Je to valcovité teleso, pričom jeho projekcia do roviny xy je množina $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$. Objem teda je (Fubiniho veta zrejme platí)

$$V(A) = \int_B (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \int_{-1}^{1} \left[\int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}\lambda_1(y) \right] \mathrm{d}\lambda_1(x)$$

Príklad 11.2.2.

Nájdime obsah tej časti kužeľovej plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ktorú z nej vytína parabolický valec $z^2 = 2y$. Hranicu množiny A projektovanej do roviny xy nájdeme ako priemet priesečnice oboch plôch. Dostávame $x^2 + y^2 - 2y = 0, z = 0$, čiže hranica množiny A je kružnica a samotná množina A je kruh $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Obsah hľadanej plochy teda je

$$S = \int_A \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \sqrt{2} \int_A \mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \sqrt{2}\pi.$$

Buď Ω hmotná rovinná doska v rovine x, y, ktorej plošná hustota je daná funkciou $\rho(x, y)$. Potom

(I) $M = \int_\Omega \rho(x, y)\, \mathrm{d}\lambda_2(x, y)$ je jej celková hmotnosť (alebo aj celkový náboj, ak ide o hustotu rozloženia náboja)

(II) $M_x = \int_\Omega y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$, $M_y = \int_\Omega x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$ sú jej statické momenty vzhľadom k osám x, y,

(III) $T_x = M_y/M$, $T_y = M_x/M$ sú súradnice jej ťažiska (hmotného stredu),

(IV) $I_p = \int_\Omega d^2(x,y)\rho(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$ je jej moment zotrvačnosti vzhľadom k priamke p, kde d je vzdialenosť od nej k bodu $[x, y]$

Príklad 11.2.3.

Nájdime súradnice ťažiska ihlana I, ktorý je ohraničený rovinami $x = 0, y = 0, z = 0$ a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ s konštantnou hustotou k. Statický moment vypočítame ako $M_{xy} = k\int_I z\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)$. Ihlan je oblasť daná nerovnosťami $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b(1 - x/a)$, $0 \le z \le c(1 - x/a - y/b)$. Dostaneme tak

$$M_{xy} = k\int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \int_0^{c(1-x/a-y/b)} z\,\mathrm{d}\lambda_1(z)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \frac{kabc^2}{24}.$$

Obdobne $M_{yz} = \frac{ka^2bc}{24}$, $M_{xz} = \frac{kab^2c}{24}$. Hmotnosť telesa je $M = k\frac{abc}{8}$ a teda $\mathbf{T} = (\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4})$.

Buď T teleso v priestore $\mathbb{R}^3$, ktorého hustota je daná funkciou $\rho(x, y, z)$. Potom

(a) $V = \int_T \mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)$ je jeho objem,

(b) $M = \int_T \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)$ je jeho celková hmotnosť,

(c) $M_{xy} = \int_T z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)$ je jeho statický moment vzhľadom k rovine xy (podobne M_{yz}, M_{xz})

(d) $T_x = M_{yz}/M$, $T_y = M_{xz}/M$, $T_z = M_{xy}/M$ sú súradnice jeho ťažiska (hmotného stredu),

(e) $I_p = \int_T D^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)$ je jeho moment zotrvačnosti vzhľadom k priamke p, kde D je vzdialenosť od neho k bodu $[x, y, z]$

(f) $I_{xy} = \int_T z^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)$ je jeho moment zotrvačnosti vzhľadom k rovine xy (obdobne I_{yz}, I_{xz})

(g) špeciálne platí $I_x = I_{xz} + I_{xy}$ a analogicky pre osy y, z

(h) potenciál tiažového poľa telesa T v bode $[x, y, z]$ sa nazýva integrál

$$u(x,y,z) = \int_T \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,\mathrm{d}\lambda_3(\xi,\eta,\zeta),$$

kde $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$. (Ak poznáme potenciál, vieme zrátať príťažlivú silu $\mathbf{F} = -mg\nabla u$.)

Stredná hodnota funkcie $f \in \mathcal{L}_n^*(M)$ na oblasti M je daná

$$E_f = \frac{1}{\lambda_n(M)} \int_M f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\lambda_n.$$

11.3. Zovšeobecnenia integrálov

Pozrieme sa na zovšeobecnenie integrálu pre komplexné funkcie (reálnej premennej), teda funkcie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Definícia 11.3.1.

Ak majú $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ komplexnej funkcie konečný Lebesgueov integrál na množine $M \in \mathcal{M}_n$, potom definujeme

$$\int_M f\, \mathrm{d}\lambda_n = \int_M \operatorname{Re} f\, \mathrm{d}\lambda_n + \mathrm{i} \int_M \operatorname{Im} f\, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Ak povieme, že merateľná komplexná funkcia je taká, že jej reálna a imaginárna časť sú merateľné, platí

Veta 11.3.2.

Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je merateľná, potom má integrál na M vtedy a len vtedy, ak $|f|$ má konečný integrál na M. ďalej platí

$$\left| \int_M f\, \mathrm{d}\lambda_n \right| \leq \int_M |f|\, \mathrm{d}\lambda_n.$$

V tejto časti sa zoznámime s priestorom funkcií, ktorý má zásadný význam napríklad v kvantovej mechanike.

Definícia 11.3.3.

Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{P}$ (napr. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$), potom zobrazenie $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{P}$ nazývame skalárny súčin, ak $\forall\ x, y, z \in V$ a $\forall \alpha \in \mathbb{P}$

(a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

(b) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,
$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

(c) $\langle x, x\rangle \geq 0$, pričom rovnosť je len pre $x = 0$.

Priestor so sklalárnym súčinom nazývame unitárny priestor.

Príklad 11.3.4.

Euklidovský priestor dimenzie $n \in \mathbb{N}$, spolu so skalárnym súčinom

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

je dôležitým príkladom unitárneho priestoru.

Príklad 11.3.5.

Priestor štvorcových matíc, kde definujeme $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB^T)$ je priestor so skalárnym súčinom.

Príklad 11.3.6.

Pre náhodné premenné X, Y definujeme strednú hodnotu ich súčinu

$$\langle X, Y\rangle := \mathrm{E}(XY),$$

čo je skalárny súčin, pričom $\langle X, Y\rangle = 0$ akk $Pr(X = 0) = 1$ (tj., $X = 0$ s.v.).

Veta 11.3.7 (Cauchyho-Buňakovského-Schwarzova nerovnosť).

Na unitárnom priestore V so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ platí:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \quad \forall x, y \in V.$$

Poznámka 11.3.8.

Unitárny priestor V je aj metrickým priestorom, kde pre prvky $x, y \in V$ definujeme metriku ako

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Overte.

Definícia 11.3.9.

Pre $M \in \mathcal{M}_n$ označíme $\mathcal{L}^p(M)$, $p \in [1, \infty)$ priestor (komplexných) funkcií f, ktoré sú merateľné na M a naviac majú konečný integrál

$$\int_M |f|^p \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

(hovoríme vlastne o triedach ekvivalentných funkcií)

Veta 11.3.10.

Priestor $\mathcal{L}^2(M)$ je lineárny vektorový priestor (s obvyklými operáciami sčítania funkcií a násobenia skalárom) so skalárnym súčinom

$$\langle f, g\rangle := \int_M f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Definícia 11.3.11.

Ak pre exponenty $1 \leq p, q \leq \infty$ platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

nazývame ich konjugované (duálne) (s konvenciou $1/\infty = 0$).

V nasledujúcich vetách prirodzene predpokladáme, že $M \in \mathcal{M}_n$. Prvá z nich hovorí o istej Hölderovej nerovnosti, ktorá je dôležitou nerovnosťou v matematickej analýze, významná najmä pri skúmaní $\mathcal{L}^p$ priestoroch ale aj porovnávaní momentov v teórii pravdepodobnosti.

Veta 11.3.12 (Hölder)**.**

Nech $1 < p < \infty$ a $1 < q < \infty$ sú konjugované exponenty. Ak $f \in \mathcal{L}^p(M)$ a $g \in \mathcal{L}^q(M)$, potom $fg \in \mathcal{L}^1(M)$ a

$$\int_M |fg| \, \mathrm{d}\lambda_n \leq \left(\int_M |f|^p \, \mathrm{d}\lambda_n \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M |g|^q \, \mathrm{d}\lambda_n \right)^{\frac{1}{q}}$$

Aplikácia tejto vety môže vyzerať aj takto:

Príklad 11.3.13.

Nech $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, $g(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, potom zrejme obe funkcie sú nezáporné a $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ a $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Teda

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, g(x,y) \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$$

je konečný.

Ak jedna z funkcií nie je z priestoru $\mathcal{L}^p(M)$ ($\mathcal{L}^q(M)$), zrejme to neznamená, že ich súčin nie je Lebesgueovsky integrovateľný.

Príklad 11.3.14.

Nech $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, potom zrejme obe funkcie sú nezáporné a $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ a $g \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ $\big($podobne ako $1/\sqrt{x} \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\big)$. Ale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, g(x,y) \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \pi^{3/2}.$$

Ukážte.

Druhá veta je vlastne trojuholníková nerovnosť.

Veta 11.3.15 (Minkowski).

Nech $1 \leq p < \infty$ a $f, g \in \mathcal{L}^p(M)$, potom $f + g \in \mathcal{L}^p(M)$ a

$$\left(\int_M |f+g|^p \, d\lambda_n\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_M |f|^p \, d\lambda_n\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M |g|^p \, d\lambda_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

Nasledujúca veta nám dáva možnosť určiť z inklúzie, kedy funkcia patrí do priestoru s nižším exponentom (to je napríklad splnené v pravdepodobnostných priestoroch).

Veta 11.3.16.

Ak $\lambda_n(M) < \infty$ a $1 \leq p_0 \leq p_1 < \infty$, potom $\mathcal{L}^{p_1}(M) \subset \mathcal{L}^{p_0}(M)$ a navyše

$$\lambda_n(M)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}} \left(\int_M |f|^{p_0} \, d\lambda_n\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \left(\int_M |f|^{p_1} \, d\lambda_n\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Opačná inklúzia zrejme neplatí. Pozrime sa na nasledujúci príklad.

Príklad 11.3.17.

Nech $T = [0, 1]$ a $f(x) = x^{-1/2}$, potom $f \in \mathcal{L}^1(T)$, ale $f \notin \mathcal{L}^2(T)$.

Nasledujúci príklad ukazuje, že predpoklad konečnosti miery množiny M je opodstatnený.

Príklad 11.3.18.

Zrejme $f(x) = x^{-1} \in \mathcal{L}^2(1, \infty)$, ale vieme, že $f \notin \mathcal{L}^1(1, \infty)$.

Využitie vety 11.3.16 nám dáva nasledujúci príklad.

Príklad 11.3.19.

Chceme zistiť, či $f(x,y) = 1/(x^2+y^2)^{1/4}$ patrí do $\mathcal{L}^1(I)$, $I = [-1,1]^2$. Ľahšie je ukázať, že patrí do $\mathcal{L}^2(I)$. To preto, lebo

$$\int_I |f|^2 \, d\lambda_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_2(y) = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+\sqrt{y^2+1}}{-1+\sqrt{y^2+1}}\right) d\lambda_1(y) =$$

$$= \left[y \ln\left(\frac{1+\sqrt{y^2+1}}{-1+\sqrt{y^2+1}}\right) + 2\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right]_{-1}^1 = -6\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Tu si treba dať pozor na neohraničenosť na okolí počiatku - zachránia nás kvadráty. Z toho ale vyplýva, že $f \in \mathcal{L}^1(I)$, pričom nájsť primitívne funkcie v tvare elementárnych funkcií pri týchto výpočtoch nie je možné.